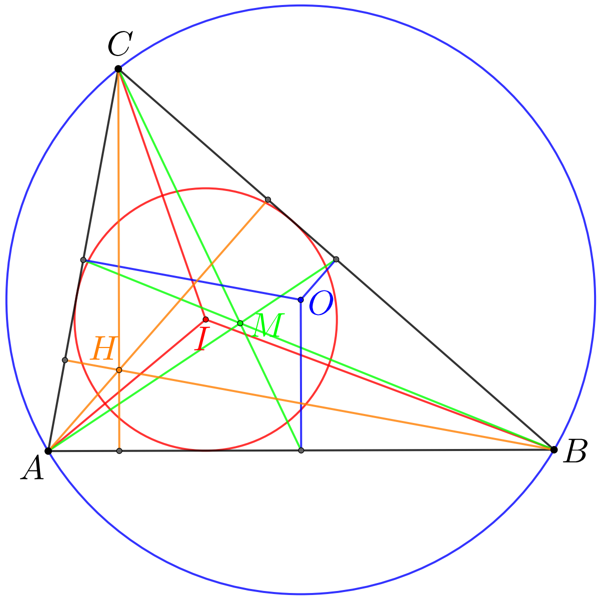
§1 Theorie

§1.1 Punkte im Dreieck

Satz 1.1: Inkreis, Umkreis, Ankreis, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt

Es gibt folgende spezielle Punkte in jedem Dreieck:

1. Inkreismittelpunkt I: Der Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden, Mittelpunkt des Kreises, der tangential an allen Dreiecksseiten liegt
2. Umkreismittlpunkt O: Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten, Mittelpunkt des Kreises durch die Dreieckspunkte
3. Ankreismittelpunkt I_A: Mittelpunkt des Kreises, der außrhalb des Dreiecks tangetial an Seite BC, Gerade AC und Gerade AB anliegt. I_B und I_C sind genau so definiert.
4. Höhenschnittpunkt H: Schnittpunkt der Höhen (isogonal konjugierte Punkt von O)
5. Schwerpunkt M: Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

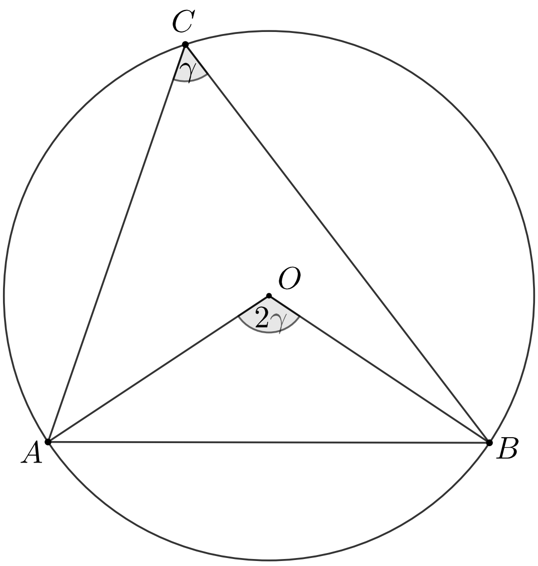


§1.2 Peripheriewinkel und Zyklische Vierecke

Satz 1.2: Zentri-Peripheriewinkelsatz

Sei O der Mittelpunkt eines Kreises, sei AB eine Sehne auf diesem Kreis und sei C ein beliebiger Punkt auf dem großen Bogen über AB. Dann gilt

$$2\angle ACB = \angle AOB$$

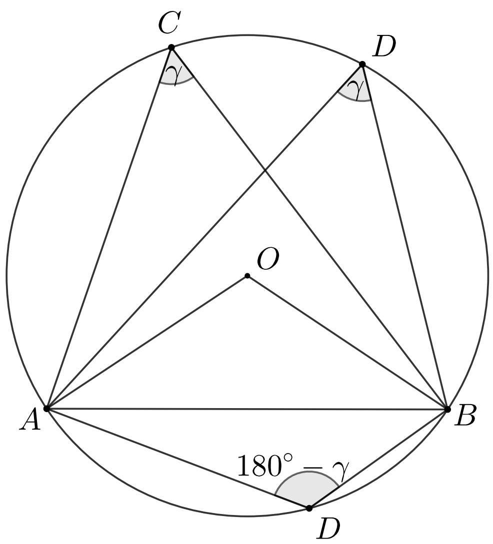


Definition 1.1: Zyklische Vierecke

Ein Viereck $ABCD$ ist zyklisch (bzw. heißt Sehnenviereck), wenn A, B C und D auf einem Kreis liegen.

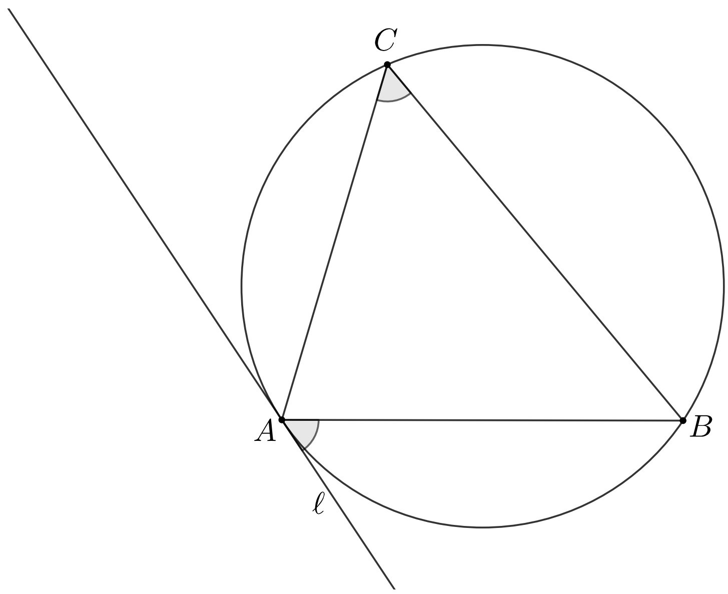
Satz 1.3: Hinreichende und notwendige Bedingung für zyklische Vierecke

Sei (ABC) der Umkreis von ABC. Liegt D auf der selben Seite von AB wie C, dann ist $ABCD$ genau dann zyklisch wenn $\angle ADB = \angle ACB$ gilt. Liegt D auf der anderen Seite von AB, dann ist $ABCD$ genau dann zyklisch, wenn $\angle ACB = 180° - \angle BDA$ gilt.



Satz 1.4: Peripherie-Tangentenwinkelsatz

Sei ω ein Kreis. Eine Gerade ℓ liegt tangential an ω in Punkt A. Ist B ein weiterer Punkt auf ω, dann sind die Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$ genauso groß wie der Winkel zwischen ℓ und AB.

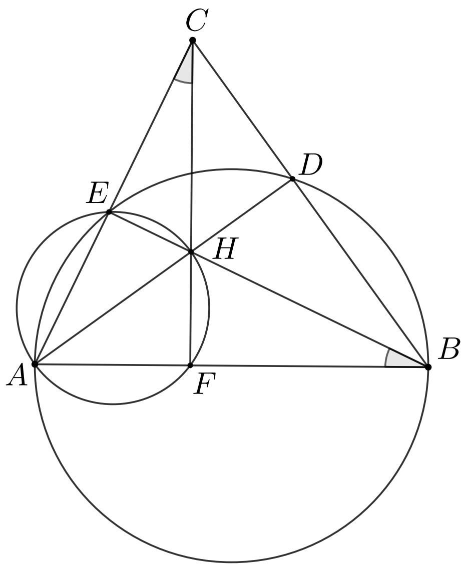


§1.3 Der Höhenschnittpunkt

Satz 1.5

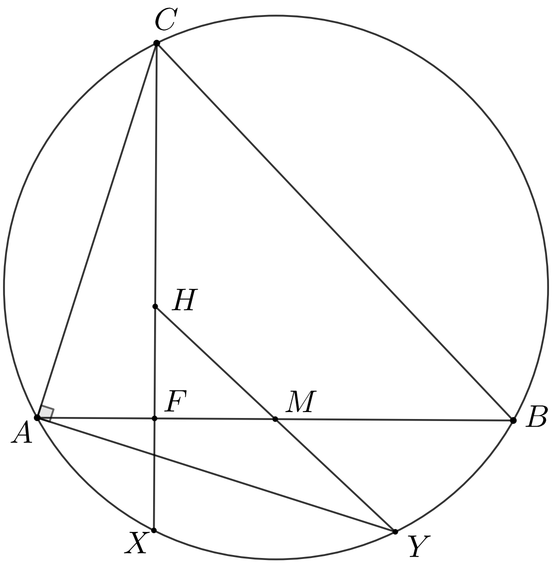
Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt h. Sind die Fußpunkte von A, B und C auf die gegenüberliegenden Seiten D, E und F, dann gilt

1. A, E, H, F sind zyklisch,
2. A, E, D, B sind zyklisch,
3. $\angle ACF = \angle EBA$.



Lemma 1.1: Reflexion des Höhenschnittpunkts — Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei überdies M der Mittelpunkt von AB.

1. Die Reflexion X von H über AB liegt auf (ABC).
2. Die Reflexion Y von H durch M liegt auf (ABC).
3. CY ist Durchmesser des Umkreises.



§1.4 Potenz am Kreis

Definition 1.2: Potenz eines Punktes

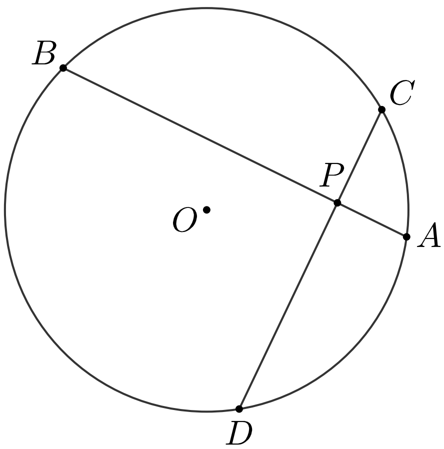
Sei ω ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r, und P ein Punkt. Eine Gerade durch P schneidet ω in A und B. Dann ist die Potenz von P im Verhältnis zu ω

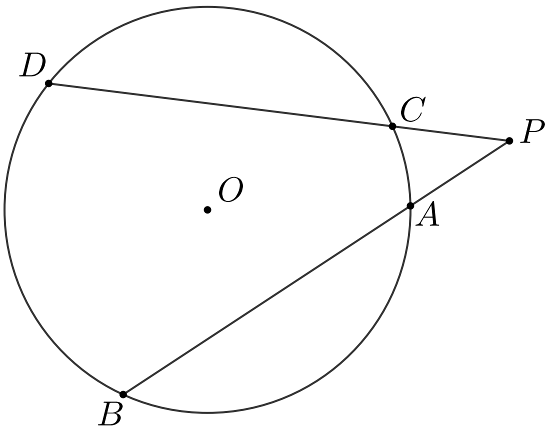
$$Pot_{\omega}(P) = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$

Satz 1.6: Erster Potenzsatz

Sei $ABCD$ ein Viereck und P der Schnittpunkt der Geraden AB und CD. Das Viereck $ABCD$ ist genau dann zyklisch, wenn gilt

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$





Definition 1.3: Potenzgerade

Die Potenzgerade zweier Kreise ω_1 und ω_2 ist die Gesamtheit aller Punkte P, sodass $Pot_{\omega_1}(P) = Pot_{\omega_2}(P)$.

Überdies steht die Potenzgerade zweier Kreise immer senkrecht auf der Geraden zweier Mittelpunkte. Die Potenzgerade zweier Kreise, die sich schneiden, lässt sich einfach konstruieren. Die Gerade ist dann genau die, die durch beide dieser Schnittpunkte geht

Satz 1.7: Zweiter Potenzsatz

Seien ω_1, ω_2 und ω_3 drei paarweise nicht konzentrische Kreise. Dann schneiden sich die drei Potenzgeraden in einem Punkt, oder sind parallel.