62. Mathematikolympiade Klasse 9/10
Runde 1 Lösungen

Lösungen von Joel Gerlach, 11N

31.08.2022

§1 Aufgaben

Aufgabe 1 (621011)**.**

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 2 (621012)**.** In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Aufgabe 3 (621013)**.** Eine positive ganze Zahl n, die sich in der Form $n = a^2 + b^3$ mit positiven ganzen Zahlen a, b darstellen lässt, bezeichnen wir als QK-Zahl und alle anderen positiven ganzen Zahlen als Nicht-QK-Zahl.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der QK-Zahlen im Bereich von 1 bis einschließlich 100.

b) Entscheiden Sie, ob es im Bereich von 1 bis 1 000 000 mehr QK-Zahlen als Nicht-QK-Zahlen gibt.

Hinweis: 40 027 ist eine QK-Zahl, da 40 027 = 2002 + 33 gilt und 200 sowie 3 positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 4 (621014)**.** In einen Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $UV = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser $\overline{UV}$, F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke BC liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $[ABCD]$ des Quadrats $ABCD$.

c) Zeigen Sie, dass $[ABCD] = 4 \cdot [BEFG]$ gilt.

Hinweis: $[A_1A_2 \ldots A_n]$ bezeichnet den Flächeninhalt vom Polygon $A_1A_2 \ldots A_n$.

Aufgabe 5 (621015)**.** In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

Aufgabe 6 (621016)**.** 2022 Piraten haben auf einer Insel einen Schatz, bestehend aus 10 000 Kokosnüssen, erbeutet. Sie wollen jetzt die Kokosnüsse einigermaßen gerecht unter sich aufteilen und gehen dazu wie folgt vor:Alle Kokosnüsse werden auf einen Haufen gelegt und alle Piraten stellen sich in einer Schlange auf. Der Reihe nach geht jeweils der erste Pirat aus der Schlange zum Kokosnusshaufen, teilt die Anzahl der noch verbliebenen Kokosnüsse durch die Anzahl der verbliebenen Piraten, zu denen er selber auch gehört, rundet das Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl auf oder ab, nimmt sich entsprechend viele Kokosnüsse und segelt mit ihnen nach Hause. Dann ist der nächste Pirat dran und so weiter. Bestimmen Sie, wie viele Kokosnüsse

a) die ersten drei Piraten,

b) die Piraten, die am Anfang an 1803. und 1804. Stelle stehen,

c) die letzten beiden Piraten erhalten.

Hinweis: Ist die erste Ziffer nach dem Komma größer oder gleich fünf, so wird aufgerundet. Ist die erste Ziffer nach dem Komma kleiner als fünf, so wird abgerundet.

§2 Lösungen

Aufgabe 1 (621011).

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

Lösung.

a) Da 2, 3 und 5 Primzahlen sind, ist $kgV(2,3,5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, und somit muss $30 \mid z$ gelten. Ebenso gilt deswegen $30 \mid Q(z)$. Es ist einfach zu sehen, dass die Zahl $n = 39990$ die Teilbarkeitsbedingungen erfüllt. Im Folgenden zeigen wir, dass keine kleinere Zahl möglich ist. Offensichtlich muss z in der Dezimaldarstellung mit einer 0 enden, da sie durch 10 teilbar ist. Wir benötigen jetzt nun wenigstens 4 weitere Ziffern vor dieser Null, da $3 \cdot 9 = 27 < 30$ ist. Ist die vordere Ziffer 1 oder 2, dann sind jeweils $1 + 3 \cdot 9 = 28 < 30$ und $2 + 3 \cdot 9 = 29 < 30$, also werden insgesamt 6 Ziffern benötigt. Offensichtlich ist jede fünfstellige Zahl, die mit $4, 5, \dots, 9$ beginnt, größer als 39990, womit der Beweis erbracht ist.

b) Wie in (a) ermitteln wir $kgV(2,3,4,5) = 60$, also muss $60 \mid Q(z), z$ gelten. Mit ähnlichem Vorgehen wie zuvor erhalten wir, dass z mindestens 8 enthält, wobei die letzte eine Null sein muss. Es ist einfach zu überprüfen, dass $n = 79999980$ die Teilbarkeitsbedingungen erfüllt. Wir zeigen nun, dass keine kleinere Zahl möglich ist. Die vorletzte Ziffer kann maximal eine 8 sein, da z durch 20 teilbar sein muss. Ist also die vorderste Ziffer eine $1, 2, \dots, 6$, benötigen wir mindestens 8 Ziffern. Somit ist $n = 79999980$ optimal.

□

Aufgabe 2 (621012)**.** In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 22$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Lösung.

a) Die Antwort ist 0: Ergibt sich sofort nach Anwendung der Formel für Differenzen von Quadraten auf den ersten und letzten Term.

b) $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$.

c) $\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{2021} + 2^2 = 2025 = 45^2$. Für den Hinweis sei angemerkt, dass wie in a)

$$\begin{aligned}&(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2021}^2 - b^2)^2 + (2a_1b)^2 + (2a_2b)^2 + \ldots + (2a_{2021})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2021}^2 + b^2)^2\end{aligned}$$

gilt. Mit $a_i = i$ und $b = 1$ finden wir eine Lösung, in der alle Quadrate verschieden sind.

□

Aufgabe 3 (621013)**.** Eine positive ganze Zahl n, die sich in der Form $n = a^2 + b^3$ mit positiven ganzen Zahlen a, b darstellen lässt, bezeichnen wir als QK-Zahl und alle anderen positiven ganzen Zahlen als Nicht-QK-Zahl.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der QK-Zahlen im Bereich von 1 bis einschließlich 100.

b) Entscheiden Sie, ob es im Bereich von 1 bis 1 000 000 mehr QK-Zahlen als Nicht-QK-Zahlen gibt.

Hinweis: 40 027 ist eine QK-Zahl, da 40 027 = 2002 + 33 gilt und 200 sowie 3 positive ganze Zahlen sind.

Lösung.

a) 29. Einfaches Auflisten (Vorsicht! 17, 65 und 89 treten jeweils doppelt auf).

b) Die größte Zahl x, sodass $x^2 < 10^6$ ist, ist $x = 999$. Die größte Zahl y, sodass $x^2 < 10^6$ ist, ist $y = 99$. Daher kann es maximal $99 \cdot 999 < 100 \cdot 1000 = 10^5$ QK-Zahlen zwischen 1 und 10^6 geben - es gibt also mehr nicht QK-Zahlen.

□

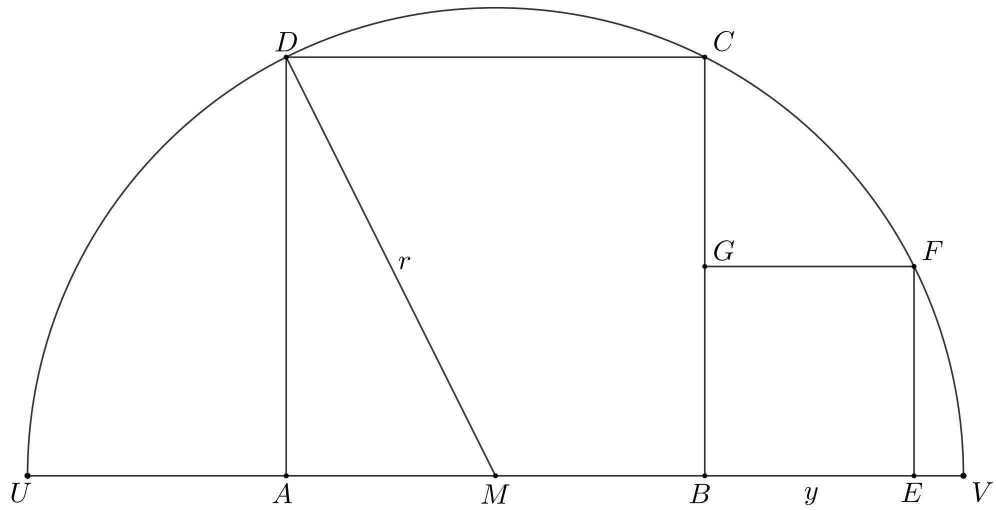
Aufgabe 4 (621014)**.** In einen Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $UV = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser $\overline{UV}$, F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke BC liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $[ABCD]$ des Quadrats $ABCD$.

c) Zeigen Sie, dass $[ABCD] = 4 \cdot [BEFG]$ gilt.

Hinweis: $[A_1A_2 \dots A_n]$ bezeichnet den Flächeninhalt vom Polygon $A_1A_2 \dots A_n$.



Lösung.

a) Sei $x = AM$. Dann haben wir $AM^2 + AD^2 = \frac{5}{4}x^2 = r^2 = 36 \iff x = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Damit ist also $x = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$. Zunächst konstruieren wir irgendwo auf dem Blatt eine Strecke von Länge $\sqrt{5}$ durch Anwendung der Wurzelschnecke. Als nächstes tragen wir diese Strecke mit einem Zirkel zweimal auf eine Gerade ab, erhalten also ein Segment von Länge $2\sqrt{5}$. Wir fünfteln nun eines dieser Segmente mit der Parallelmethode und erhalten somit ein Segment von Länge $\frac{6}{5}\sqrt{5}$, das wir nun um M auf UV abtragen können. Von hier an ist das weitere Vorgehen trivial.

b) Aus a) erhalten wir $AB = 2AM = 2x = \frac{12}{\sqrt{5}}$ also ist $[ABCD] = \frac{144}{5}$.

c) Wir zentrieren den Kreis im kartesischen Koordinatensystem bei $(0, 0)$, womit der Halbkreis durch $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ beschrieben wird. Sei y der Abstand von B zu E. Wir wollen nun erreichen, dass f am Punkt E genau so groß ist wie y um ein Quadrat zu erhalten. Wir suchen also nun die Lösung der Gleichung

$$y = \sqrt{36 - (\frac{6}{5}\sqrt{5} + y)^2}$$

Diese Gleichung lässt sich zu einer quadratischen Gleichung in Standardform umformen und hat die Lösung $y = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Daher ist $[BEFG] = \frac{36}{5} = \frac{1}{4}[ABCD]$, wie gewünscht.

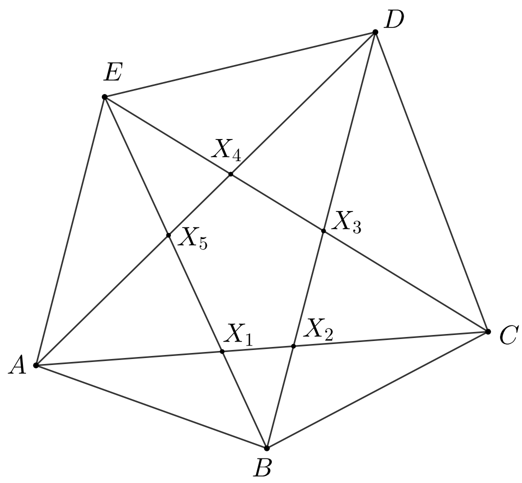
□

Aufgabe 5 (621015)**.** In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.



Für b) brauchen wir folgende Behauptung

Behauptung 1 — In einem konvexen Fünfeck können sich nie drei Diagonalen in einem Punkt schneiden. Demnach gibt es auch genau $\binom{5}{2} - 5 = 5$ Diagonalenschnittpunkte im Fünfecks.

Beweis der Behauptung 1. Offensichtlich können sich zwei Diagonalen, die in den selben Punkt $X \in \{A, B, C, D, E\}$ verlaufen, nur in X schneiden. Damit sich also drei Diagonalen in einem Punkt schneiden, müssen sie aus paarweise verschiedene Punkte entspringen, d.h. wir brauchen mindestens $\binom{3}{2} = 6$ Punkte, was im Widerspruch dazu steht, dass wir nur 5 Ecken haben. □

Beweis.

a) Wir nutzen die Dreiecksungleichung mehrmals (sind a, b und c Seiten eines Dreiecks, dann gilt $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$) und bekommen:

$$\begin{aligned} 2u &= (AB + BC + CD + DE + EA) + (AB + BC + CD + DE + EA) \\ &= (AB + BC) + (BC + CD) + (CD + DE) + (DE + EA) + (EA + AB) \\ &> (AC) + (BD) + (CE) + (DA) + (EB) = d, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

b) Seien die 5 Schnittpunkte wie in der Darstellung bezeichnet. Die Teilaufgabe ergibt sich nun direkt aus der Anwendung der Dreiecksungleichung auf

$$\triangle ABX_1, \triangle BCX_2, \ldots, \triangle EAX_5$$

und anschließender Summierung.

$\square$

Aufgabe 6 (621016)**.** 2022 Piraten haben auf einer Insel einen Schatz, bestehend aus 10 000 Kokosnüssen, erbeutet. Sie wollen jetzt die Kokosnüsse einigermaßen gerecht unter sich aufteilen und gehen dazu wie folgt vor:Alle Kokosnüsse werden auf einen Haufen gelegt und alle Piraten stellen sich in einer Schlange auf. Der Reihe nach geht jeweils der erste Pirat aus der Schlange zum Kokosnusshaufen, teilt die Anzahl der noch verbliebenen Kokosnüsse durch die Anzahl der verbliebenen Piraten, zu denen er selber auch gehört, rundet das Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl auf oder ab, nimmt sich entsprechend viele Kokosnüsse und segelt mit ihnen nach Hause. Dann ist der nächste Pirat dran und so weiter. Bestimmen Sie, wie viele Kokosnüsse

a) die ersten drei Piraten,

b) die Piraten, die am Anfang an 1803. und 1804. Stelle stehen,

c) die letzten beiden Piraten erhalten.

Hinweis: Ist die erste Ziffer nach dem Komma größer oder gleich fünf, so wird aufgerundet. Ist die erste Ziffer nach dem Komma kleiner als fünf, so wird abgerundet.

Lösung.

a) 5.

b) Sei P_i der i-te Pirat, k_i die Anzahl von Kokosnüssen, die der i-te Pirat bekommt, und sei $r(x)$ die nächstliegende ganze Zahl einer positiven rationalen Zahl x. Wir bezeichnen einen Piraten P_i als "gerade noch glücklich", wenn $r(k_i) > r(k_i - 1)$ ist. Es ist wie in a) einfach zu sehen, dass der erste Pirat 5 Kokosnüsse erhält. Wir wollen nun den ersten Umschwungspunkt ermitteln. Wir betrachten also den Term

$$\ell_5(i) = r\left(\frac{10000 - 5(i-1)}{2022 - (i-1)}\right)$$

und wollen herausfinden, wann er sich von 5 zu 4 ändert. Eine einfache Überprüfung ergibt, dass $\ell_5(1803) = 5$ ist, aber $\ell_5(1804) = 4$ gilt. Demnach ist P_{1803} gerade noch glücklich, erhält also 5, während P_{1804} nur noch 4 Kokusnüsse erhält.

c) P_{1804} hat noch $10000 - 5(1803) = 985$ Kokosnüsse vor sich liegen, also versuchen wir nun herauszufinden, wann sich die Funktion

$$\ell_4(i) = r\left(\frac{985 - 4(i-1)}{219 - (i-1)}\right)$$

ändert. In der Tat sehen wir nun dass die Funktion für $i = 2$ wieder zu 5 ändert, nach erneuter Anpassung zu 4, nach erneuter Anpassung zu 5 etc.. Demnach erhält der vorletzte Pirat 5, und der letzte Pirat 4 Kokosnüsse.

□