

62. Mathematikolympiade Klasse 11/12

Runde 1 Lösungen

Lösungen von Joel Gerlach, 11N

07.08.2022

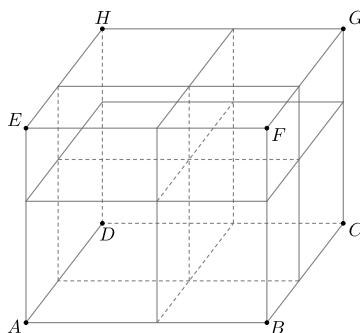
§1 Aufgaben

Aufgabe 1 (621211). Ein Quader $Q = ABCDEFGH$ setzt sich lückenlos aus acht Teilquadern zusammen, sodass jeder Teilquader nur einen Eckpunkt von Q enthält (Abbildung unten). Von sieben der acht Teilquader ist der in cm^2 gemessene Oberflächeninhalt bekannt:

$$OA = 62, OB = 190, OC = 220, OE = 72, OF = 216, OG = 248 \text{ und } OH = 88.$$

Dabei bezeichnet OP den Inhalt der Oberfläche des Quaders QP , der den Eckpunkt P des ursprünglichen Quaders Q enthält.

Man berechne den Oberflächeninhalt OD des in der Skizze verdeckten achten Quaders.



Aufgabe 2 (621212). Streicht man von der Nummer dieser Aufgabe die führende Ziffer, so bleibt die ganze Zahl 21212. Diese hat fünf Stellen, für ihre Quersumme und ihr Querprodukt gilt

$$2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2.$$

Man ermittle, wie viele fünfstelligen Zahlen positive ganze Zahlen existieren, für die Quersumme und Querprodukt den gleichen Wert ergeben.

Aufgabe 3 (621213). Im konvexen Fünfeck $ABCDE$ ist die Seite \overline{BC} parallel zur Diagonalen \overline{AD} , und die Seite \overline{AE} ist parallel zur Diagonalen \overline{BD} . Die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Seiten CD beziehungsweise DE . Der Punkt Q ist der Schnittpunkt der Strecken AM und BN . Man beweise, dass das Viereck $MDNQ$ und das Dreieck ABQ flächengleich sind.

Aufgabe 4 (621214). Eine aus 27 Kindern bestehende Schulklasse besucht einen Freizeitpark. Eine der Attraktionen ist ein regelmäßiges 77-Eck, in dessen Ecken jeweils ein steinerner Turm mit nur einem Fenster steht. Die Mauern sind dick und die Fenster so schmal, dass man daraus von allen anderen Türmen nur die Fenster der 26 Türme sehen kann, die am weitesten entfernt sind.

Die Kinder verteilen sich auf beliebige 27 der 77 Türme.

Man beweise, dass es stets zwei Kinder gibt, die sich gegenseitig sehen können.

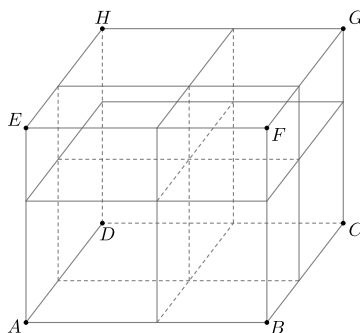
§2 Lösungen

Aufgabe 1 (621211). Ein Quader $Q = ABCDEFGH$ setzt sich lückenlos aus acht Teilquadern zusammen, sodass jeder Teilquader nur einen Eckpunkt von Q enthält (Abbildung unten). Von sieben der acht Teilquader ist der in cm^2 gemessene Oberflächeninhalt bekannt:

$$OA = 62, OB = 190, OC = 220, OE = 72, OF = 216, OG = 248 \text{ und } OH = 88.$$

Dabei bezeichnet OP den Inhalt der Oberfläche des Quaders QP , der den Eckpunkt P des ursprünglichen Quaders Q enthält.

Man berechne den Oberflächeninhalt OD des in der Skizze verdeckten achten Quaders.



Beweis. Sei O der Oberflächeninhalt des ganzen Quaders. Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$O_A + O_F + O_C + O_H = O, O_B + O_D + O_E + O_G = O$$

ist, indem wir jeweils die Hälfte der jeweiligen kleinen Quaderflächen auf die gegen überliegende Seite benachbarten Quaders projizieren. Damit ergibt sich

$$O_D = O_A + O_F + O_C + O_H - (O_B + O_E + O_G) = 76.$$

□

Aufgabe 2 (621212). Streicht man von der Nummer dieser Aufgabe die führende Ziffer, so bleibt die ganze Zahl 21212. Diese hat fünf Stellen, für ihre Quersumme und ihr Querprodukt gilt

$$2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2.$$

Man ermittle, wie viele fünfstelligen Zahlen positive ganze Zahlen existieren, für die Quersumme und Querprodukt den gleichen Wert ergeben.

Lösung. Wir nennen Zahl mit dieser Eigenschaft aufbrausend. Sei mit \overline{abcde} eine fünfstellige Zahl bezeichnet. Wir ordnen zunächst $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Wir schätzen nun

$$abcde = a + b + c + d + e \leq 5e \iff abcd \leq 5.$$

Daher ist (a, b, c, d) eines der Tupel

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 4), (1, 1, 1, 5)$$

. Es ist einfach zu überprüfen, dass keine der Zahlen $e \in \{1, \dots, 9\}$, die überdies noch $e \geq a, b, c, d$ erfüllen, die Tupel

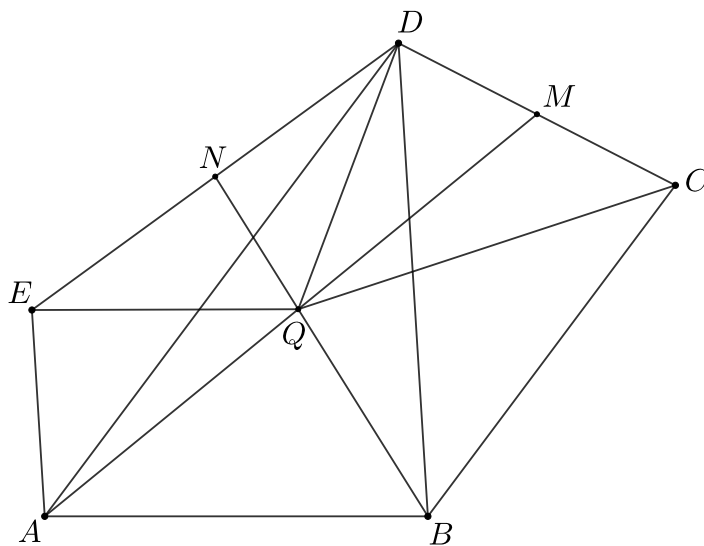
$$(1, 1, 1, 1, e), (1, 1, 1, 4, e), (1, 1, 1, 5, e)$$

aufbrausend machen kann. Allerdings funktionieren $(1, 1, 2, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 3, 3)$ und $(1, 1, 1, 2, 5)$ und deren Permutationen. Daher gibt es

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!3!} = 40$$

solcher Zahlen. □

Aufgabe 3 (621213). Im konvexen Fünfeck $ABCDE$ ist die Seite \overline{BC} parallel zur Diagonalen \overline{AD} , und die Seite \overline{AE} ist parallel zur Diagonalen \overline{BD} . Die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Seiten CD beziehungsweise DE . Der Punkt Q ist der Schnittpunkt der Strecken AM und BN . Man beweise, dass das Viereck $MDNQ$ und das Dreieck ABQ flächengleich sind. (Abbildung A 621213)



Die Bogus Lösung

Beweis. (Die Bogus Lösung) Wir bezeichnen den Flächeninhalt einer Figur mit $[Figur]$. Die Idee ist $[ABD]$ auf zwei unterschiedliche Weisen auszudrücken. Zunächst ist

$$[ABD] = [BED] = \frac{BN}{QN} [DQE] = 2 \frac{BN}{QN} [DNQ]$$

und ähnlich

$$[ABD] = [ADC] = \frac{AM}{QM}[DQC] = 2\frac{AM}{QM}[DMQ].$$

Allerdings sind auch

$$[BQD] = [BND] - [DNQ] = \frac{BN}{QN}[DNQ] - [DNQ] = [DNQ] \left(1 - \frac{BN}{QN}\right)$$

und

$$[AQD] = [AMD] - [DMQ] = \frac{AM}{QM}[DMQ] - [DMQ] = [DMQ] \left(1 - \frac{AM}{QM}\right)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\frac{BN}{QN}[DNQ] + 2\frac{AM}{QM}[DMQ] &= 2[ABD] = 2[AQB] + 2[AQD] + 2[BQD] \\ &= 2[AQB] + 2[DNQ] \left(1 - \frac{BN}{QN}\right) + 2[DMQ] \left(1 - \frac{AM}{QM}\right) \\ &\iff 2[MDNQ] = 2[DNQ] + 2[DMQ] = 2[ABD] \iff [MDNQ] = [ABQ] \end{aligned}$$

wie gewünscht. \square

Beweis. (Die coole Lösung) Wir bashen mit kartesischen Koordinaten. Zunächst seien A und B zu $A = (0, 0)$ und $B = (1, 0)$ homogenisiert. Nun liegt E auf einer Geraden durch A , sei es $nx, n < 0$, bei Stelle e , hat also die Koordinaten $E = (e, ne)$. Da $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ ist, liegt D auf der Geraden $n(x-1)$, sagen wir an Stelle d , hat also Koordinaten $D = (d, n(d-1))$. Damit wir nun die Diagonale \overline{AD} durch $n(d-1) \cdot x$ beschrieben. Demnach liegt C auf der Geraden $n(d-1)(x-1)$, sagen wir bei Stelle c und hat daher die Koordinaten $(c, n(d-1)(c-1))$. Nun haben Punkte N und M die Koordinaten

$$N = \left(\frac{e+d}{2}, n\frac{(e+d-1)}{2}\right), M = \left(\frac{d+c}{2}, n(d-1)\frac{c}{2}\right)$$

Nun finden wir noch die Koordinaten von Q . Die Gerade AM hat die Gleichung

$$\frac{n(d-1) + n(d-1)(c-1)}{2} \cdot x = n(d-1)\frac{c}{2} \cdot x$$

während BN die Gleichung

$$\frac{n(d-1) + ne}{2} = n\frac{e+d-1}{2} \cdot (x-1)$$

hat. Einfache Algebra gibt uns

$$x = \frac{(1-d-e)}{(d-1)(c-1) - e}$$

also hat ist Q der Punkt

$$Q = \left(\frac{(1-d-e)}{(d-1)(c-1) - e}, \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1) - e)}\right) := (q_1, q_2)$$

Wir nutzen nun zunächst die Schnürsenkelformel für $\triangle ABQ$ also $(0, 0), (0, 1), (q_1, q_2)$ ¹.
Damit ist

$$\begin{aligned} 2[\triangle ABQ] &= |0 \cdot 1 + 0 \cdot q_2 \cdot 0 - (0 \cdot 0 + 1 \cdot q_2 + q_1 \cdot 0)| = q_2 \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Schnürsenkelformel für das Viereck $DMQN$, Sei $M = (m_1, m_2), D = (d_1, d_2), N = (n_1, n_2)$. Zunächst ist

$$\begin{aligned} p_1 &:= q_1 m_2 + m_1 d_2 + d_1 n_2 + n_1 q_2 \\ &= \frac{(1-d-e)}{(d-1)(c-1)-e} \cdot n(d-1) \frac{c}{2} + \frac{d+c}{2} \cdot n(d-1) \\ &\quad + d \cdot n \frac{(e+d-1)}{2} + \frac{e+d}{2} \cdot \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{2+e+d}{2} \right) + \frac{d+c}{2} \cdot n(d-1) + d \cdot n \frac{(e+d-1)}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_2 &:= q_2 m_1 + m_2 d_1 + d_2 n_1 + n_2 q_1 \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \cdot \frac{d+c}{2} + n(d-1) \frac{c}{2} \cdot d \\ &\quad + n(d-1) \cdot \frac{e+d}{2} + n \frac{(e+d-1)}{2} \cdot \frac{(1-d-e)}{(d-1)(c-1)-e} \\ &= \dots + \left(\frac{ne}{2} + \frac{n(d-1)}{2} \right) \frac{(1-d-e)}{(d-1)(c-1)-e} \\ &= \dots + \frac{ne(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} + \frac{n(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \\ &= \frac{n(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{d+c+2}{2} \right) + n(d-1) \frac{c}{2} \cdot d \\ &\quad + n(d-1) \cdot \frac{e+d}{2} + \frac{ne(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \end{aligned}$$

Nun schauen wir auf

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{2+e+d}{2} \right) + \frac{d+c}{2} \cdot n(d-1) + d \cdot n \frac{(e+d-1)}{2} \\ &\quad - \left(\frac{n(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{d+c+2}{2} \right) + n(d-1) \frac{c}{2} \cdot d + n(d-1) \cdot \frac{e+d}{2} + \frac{ne(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \right) \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{e-c}{2} \right) + \frac{d+c}{2} \cdot n(d-1) + d \cdot n \frac{(e+d-1)}{2} \\ &\quad - \left(n(d-1) \frac{c}{2} \cdot d + n(d-1) \cdot \frac{e+d}{2} + \frac{ne(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \right) \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \left(\frac{e-c}{2} + 1 - \frac{e-c}{2} \right) \\ &= \frac{nc(d-1)(1-d-e)}{2((d-1)(c-1)-e)} \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

¹Alternativ die einfache Höhen-Seiten Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks, es soll nur an die Anwendung auf das Viereck gewöhnen.

Aufgabe 4 (621214). Eine aus 27 Kindern bestehende Schulklasse besucht einen Freizeitpark. Eine der Attraktionen ist ein regelmäßiges 77-Eck, in dessen Ecken jeweils ein steinerner Turm mit nur einem Fenster steht. Die Mauern sind dick und die Fenster so schmal, dass man daraus von allen anderen Türmen nur die Fenster der 26 Türme sehen kann, die am weitesten entfernt sind.

Die Kinder verteilen sich auf beliebige 27 der 77 Türme.

Man beweise, dass es stets zwei Kinder gibt, die sich gegenseitig sehen können.

Beweis. Wir nutzen einen gierigen Algorithmus, in dem alle 27 Kinder nach einander in den Türmen platziert werden. Außerdem nennen wir einen Turm gut, wenn in ihm kein Kind sitzt und kein anderes Kind ihn sehen kann, andernfalls nennen wir ihn schlecht. Sei S_i die Anzahl der schlechten Türme nachdem i Kinder in den Türmen platziert wurden und sei T_j der T_j -ste Turm in dem 77-Eck.

Offensichtlich ist sehen reflexiv. Wir betrachten nun ein bereits platziertes Kind, o.B.d.A sei es in Turm T_1 . Demnach sind die Türme $T_1, T_{27}, T_{28}, \dots, T_{52}$ schlecht. Es müssen jetzt noch 26 weitere Kinder platziert werden. Sei $S_1 = \{T_2, \dots, T_{26}\}$, $S_2 = \{T_{53}, \dots, T_{77}\}$. Es ist einfach zu sehen, dass nicht alle Kinder nur in einem der beiden Mengen platziert werden können, da beide nur 25 Elemente haben. Um also eine Konfiguration zu konstruieren, in der sich keine zwei Kinder sehen können, muss in wenigstens einer der beiden Mengen mindestens ein guter Turm sein. Platziere wir nur ein Kind in einer der beiden Mengen, steigt S um mindestens 2, einmal um 1, weil das Kind in einem Turm platziert wird und noch einmal um 1, weil in der anderen Menge mindestens ein schlechter Turm hinzukommt.

Da $S_1 = 27$ und $S_{i+1} \geq S_i + 2$ ist, ist $S_{27} = 27 + 2 \cdot 26 = 79 > 77$, ein Widerspruch, da es nur 77 Türme gibt. \square