§1 Algebra

§1.1 Ungleichungen

Problem 1.1 (531034)**.** Die Kantenlängen eines Quaders seien a, b und c, die Länge jeder seiner Raumdiagonalen d. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{3}abcd \leqslant (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$$

Für welche Quader gilt das Gleichheitszeichen? **Hinweise:** 4 9

Problem 1.2 (421036)**.** Beweisen Sie, dass für alle reelle Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ gilt:

$$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Hinweise: 8 10

Problem 1.3 (571224)**.** Man bestimme den kleinsten Wert, den das Produkt

$$p = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right)$$

annehmen kann, wenn a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$ sind. **Hinweise:** 7 5 6

Problem 1.4 (541236)**.** Man beweise: Sind x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$, so gilt

$$\sqrt[3]{x - x^3} + \sqrt[3]{y - y^3} + \sqrt[3]{z - z^3} \leqslant 2.$$

Hinweise: 2 1 3

§2 Zahlentheorie

§2.1 Teilbarkeit

Problem 2.1 (Finde Number nicht :()**.** Es seien m und n teilerfremde positive ganze Zahlen. Man zeige, dass die folgenden Aussagen für alle ganzen Zahlen k äquivalent sind

1. $n + m$ teilt $n^2 + km^2$
2. $n + m$ teilt $k + 1$

Hinweise: 11

§3 Hinweise

1. $x^3 + y^3 + z^3$ mit $x + y + z = 1$ verwenden
2. Jensen's Ungleichung
3. Wo bleibt der Mut?
4. Pythagora
5. $1 - a = b + c + d$ sieht vielversprechend aus
6. Am-Gm genügt
7. Gleichheitsfall und damit die Ungleichung aufstellen
8. Durchmultiplizieren

9. Am-Gm oder Umordnungsungleichung
10. Am-Gm (Vorsicht!) oder Umordnungsungleichung
11. $2 \to 1$ ist einfach, für $1 \to 2$: erzwinge den Term $k + 1$ auf der rechten Seite.